

Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

Semana 11

1. Calcule as transformadas de Laplace e as regiões de convergência das funções definidas em $t \geq 0$ pelas expressões seguintes:

(a) $f(t) = \text{ch}(at)$

(b) $f(t) = t \text{sen}(at)$

(c) $f(t) = e^{at} \cos(bt)$

(d) $f(t) = \frac{\text{sen}(t)}{t}, (t > 0)$

Resolução:

(a) Atendendo a que

$$\text{ch}(at) = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$$

e à linearidade da Transformada de Laplace, tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\text{ch}(at)\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right\}(s) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) + \mathcal{L}\{e^{-at}\}(s)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) = \frac{s}{s^2 - a^2}\end{aligned}$$

Visto

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a} \quad \text{se } \text{Re } s > a$$

e

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\}(s) = \frac{1}{s+a} \quad \text{se } \text{Re } s > -a$$

tem-se que

$$\mathcal{L}\{\text{ch}(at)\}(s) = \frac{s}{s^2 - a^2} \quad \text{se } \text{Re } s > |a|$$

(b) Atendendo a que para $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}\{f\}(s) = (-1)^n \mathcal{L}\{t^n f\}(s) \quad (1)$$

tem-se que

$$\mathcal{L}\{t \text{sen}(at)\}(s) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{\text{sen}(at)\}(s) = -\frac{d}{ds} \frac{a}{s^2 + a^2} = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$$

Visto

$$\mathcal{L}\{\text{sen}(at)\}(s) = \frac{s}{s^2 + a^2} \quad \text{se } \text{Re } s > 0$$

tem-se

$$\mathcal{L}\{t \text{sen}(at)\}(s) = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2} \quad \text{se } \text{Re } s > 0$$

(c) Atendendo a que

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s-a)$$

tem-se que

$$\mathcal{L}\{e^{at}\cos(bt)\}(s) = \mathcal{L}\{\cos(bt)\}(s-a) = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$$

válido para $\text{Re}(s-a) > 0$, ou seja, $\text{Re } s > a$.

(d) Visto não se conseguir calcular, por primitivação, o integral

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\sin t}{t} dt$$

teremos que utilizar uma das propriedades da Transformada de Laplace. Assim sendo, note-se que

$$\frac{d}{ds}\left(\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}(s)\right) = -\mathcal{L}\left\{t\frac{\sin t}{t}\right\}(s) = -\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = -\frac{1}{s^2 + 1}$$

pelo que, integrando em s

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}(s) = -\arctg s + c$$

Para calcular o valor constante, consideramos a equação anterior no caso especial $s = 0$:

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = c$$

É conhecido que

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \pi$$

pelo que $c = \frac{\pi}{2}$ e

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}(s) = -\arctg s + \frac{\pi}{2}$$

2. Calcule a inversa da Transformada de Laplace de

$$(a) (s^2 - 1)^{-2} \quad (b) 6(s^4 + 10s^2 + 9)^{-1}$$

$$(c) \frac{s+1}{s^2 + s - 6} \quad (d) \frac{1}{(s+1)^4}$$

Resolução:

(a) Para calcular a inversa da Transformada de Laplace, vamos separar a função em frações simples, isto é

$$\frac{1}{(s^2 - 1)^2} = \frac{1}{(s-1)^2(s+1)^2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{(s+1)^2}$$

Calculando as constantes, tem-se então que

$$\frac{1}{(s^2 - 1)^2} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}\right)$$

É óbvio que

$$\frac{1}{s-1} = \mathcal{L}\{e^t\}(s) \quad \text{e} \quad \frac{1}{s+1} = \mathcal{L}\{e^{-t}\}(s)$$

Por outro lado, visto

$$\frac{1}{(s-1)^2} = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s-1} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{e^t\}(s)$$

mais uma vez por aplicação da propriedade (1), teremos

$$\frac{1}{(s-1)^2} = \mathcal{L}\{te^t\}(s)$$

e de modo análogo se conclui que

$$\frac{1}{(s+1)^2} = \mathcal{L}\{te^{-t}\}(s)$$

Finalmente

$$\frac{1}{(s^2-1)^2} = \frac{1}{4} \mathcal{L}\left\{-e^t + te^t + e^{-t} + te^{-t}\right\}(s)$$

pelo que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2-1)^2}\right)(t) = \frac{1}{4}\left(-e^t + te^t + e^{-t} + te^{-t}\right)$$

(b) Note-se que

$$s^4 + 10s^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow s^2 = -9 \quad \text{ou} \quad s^2 = -1$$

pelo que

$$\frac{6}{s^4 + 10s^2 + 9} = \frac{6}{(s^2+1)(s^2+9)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+9}$$

Calculando as constantes, tem-se então que

$$\frac{6}{s^4 + 10s^2 + 9} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+9}\right) = \frac{3}{4}\left(\mathcal{L}\{\sin t\}(s) - \frac{1}{3}\mathcal{L}\{\sin 3t\}(s)\right)$$

pelo que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6}{s^4 + 10s^2 + 9}\right)(t) = \frac{3}{4}\sin t - \frac{1}{4}\sin 3t$$

(c) Mais uma vez separando em frações simples

$$\frac{s+1}{s^2+s-6} = \frac{s+1}{(s-2)(s+3)} = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{s-2} + \frac{2}{s+3}\right) = \frac{1}{5}\left(3\mathcal{L}\{e^{2t}\}(s) + 2\mathcal{L}\{e^{-3t}\}(s)\right)$$

pelo que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{s^2+s-6}\right)(t) = \frac{1}{5}(3e^{2t} + 2e^{-3t})$$

(d) Note-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s+1)^4} &= -\frac{1}{3} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{(s+1)^3} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{(s+1)^2} \right) \\ &= -\frac{1}{6} \frac{d^3}{ds^3} \left(\frac{1}{s+1} \right) = -\frac{1}{6} \frac{d^3}{ds^3} \left(\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s) \right) \end{aligned}$$

e por aplicação de (1)

$$\frac{1}{(s+1)^4} = -\frac{1}{6} \cdot (-1)^3 \mathcal{L}\{t^3 e^{-t}\}(s)$$

Então

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^4}\right)(t) = \frac{1}{6}t^3 e^{-t}$$

3. Utilizando a Transformada de Laplace resolva os seguintes problemas de valor inicial:

- a) $y'' - y' - 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$
- b) $y'' + \omega^2 y = \cos(2t)$, $\omega^2 \neq 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
- c) $y'' + 2y' + 2y = h(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ sendo

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } \pi \leq t < 2\pi \\ 0 & \text{se } 0 \leq t < \pi \text{ e } t \geq 2\pi \end{cases}$$

Resolução:

(a) Para a resolução dos problemas de valor inicial, iremos utilizar a propriedade

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\}(s) \quad (2)$$

que tem como consequência imediata

$$\mathcal{L}\{f''(t)\}(s) = -f'(0) - sf(0) + s^2\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

Aplicando a Transformada de Laplace a ambos os membros da equação, utilizando (2) e denotando $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$, obtem-se

$$-y'(0) - sy(0) + s^2Y(s) - (-y(0) + sY(s)) - 6Y(s) = 0 \Leftrightarrow (s^2 - s - 6)Y(s) + 2 - s = 0$$

onde utilizámos o facto de $y(0) = -y'(0) = 1$. Então

$$Y(s) = \frac{s-2}{s^2-s-6} = \frac{1}{5} \left(\frac{4}{s+2} + \frac{1}{s-3} \right) = \frac{1}{5} \left(4\mathcal{L}\{e^{-2t}\}(s) + \mathcal{L}\{e^{3t}\}(s) \right)$$

pelo que a solução do PVI é

$$y(t) = \frac{1}{5} \left(4e^{-2t} + e^{3t} \right)$$

(b) Aplicando a Transformada de Laplace a ambos os membros da equação, utilizando (2) e denotando $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$, obtém-se

$$-y'(0) - sy(0) + s^2Y(s) + \omega^2Y(s) = \frac{s}{s^2+4} \Leftrightarrow (s^2 + \omega^2)Y(s) - s = \frac{s}{s^2+4}$$

onde utilizámos o facto de $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$. Então

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2+4)(s^2+\omega^2)} + \frac{s}{s^2+\omega^2} \equiv H_1(s) + H_2(s)$$

Não há dúvida que

$$H_2(s) = \mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s)$$

Relativamente a $H_1(s)$, é fundamental notar que o resultado depende do valor de ω .

Se $\omega^2 \neq 4$ então, decompondo $H_1(s)$ em fracções simples:

$$H_1(s) = \frac{1}{\omega^2 - 4} \left(\frac{s}{s^2 + 4} - \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right)$$

Assim:

$$H_1(s) = \frac{1}{\omega^2 - 4} \left(\mathcal{L}\{\cos 2t\}(s) - \mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) \right) = \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{\omega^2 - 4} (\cos 2t - \cos \omega t) \right\} (s)$$

Logo, a solução do PVI no caso $\omega^2 \neq 4$ (ou seja, $\omega \neq -2$ e $\omega \neq 2$) é:

$$y(t) = \cos \omega t + \frac{1}{\omega^2 - 4} (\cos 2t - \cos \omega t)$$

Se $\omega = -2$ ou $\omega = 2$, então:

$$H_1(s) = \frac{s}{(s^2 + 4)^2} = -\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2 + 4} \right) = -\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{2} \mathcal{L}\{\sin 2t\}(s) \right)$$

e mais uma vez por aplicação de (1), tem-se

$$H_1(s) = -\frac{1}{4} (-1)^1 \mathcal{L}\{t \sin 2t\}(s)$$

Finalmente a solução do PVI neste caso é:

$$y(t) = \frac{1}{4} t \sin 2t + \cos 2t$$

Neste caso ocorre ressonância.

(c) Aplicando a Transformada de Laplace a ambos os membros da equação, utilizando (2) e denotando $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$, obtem-se

$$-y'(0) - sy(0) + s^2 Y(s) + 2(-y(0) + sY(s)) + 2Y(s) = \frac{1}{s} (e^{-\pi s} - e^{-2\pi s})$$

pelo que

$$(s^2 + 2s + 2)Y(s) - 1 = \frac{1}{s} (e^{-\pi s} - e^{-2\pi s})$$

onde utilizámos o facto de $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$. Então

$$Y(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s(s^2 + 2s + 2)} - \frac{e^{-2\pi s}}{s(s^2 + 2s + 2)} + \frac{1}{s^2 + 2s + 2} \equiv H_1(s) + H_2(s) + H_3(s)$$

Para calcular a Transformada de Laplace inversa de $H_3(s)$ poderemos utilizar um dos dois métodos seguintes:

(i) Note-se que

$$H_3(s) = \frac{1}{(s+1)^2 + 1} = H(s+1)$$

sendo

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 1} = \mathcal{L}\{\sin t\}(s)$$

Utilizando a propriedade

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}(s+a) \quad (3)$$

podemos concluir

$$H_3(s) = \mathcal{L}\{\sin t\}(s+1) = \mathcal{L}\{e^{-t}\sin t\}(s)$$

(ii) Atendendo a que

$$s^2 + 2s + 2 = 0 \Leftrightarrow s = -1 + i \text{ ou } s = -1 - i$$

podemos separar em frações simples

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2 + 2s + 2} &= \frac{A}{s - (-1 + i)} + \frac{B}{s - (-1 - i)} \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s - (-1 + i)} - \frac{1}{s - (-1 - i)} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\mathcal{L}\{e^{(-1+i)t}\}(s) - \mathcal{L}\{e^{(-1-i)t}\}(s) \right) \\ &= \frac{1}{2i} \mathcal{L}\{e^{-t}(e^{it} - e^{-it})\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{e^{-t}\sin t\}(s) \end{aligned}$$

Por outro lado, para calcular as inversas das Transformadas de Laplace de H_1 e H_2 podemos utilizar a propriedade:

$$\mathcal{L}\{H(t-a)f(t-a)\}(s) = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) \quad (4)$$

Note-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)} &= \frac{1}{2s} - \frac{1}{2} \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1} - \frac{1}{(s+1)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{1\}(s) - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-t}\cos t\}(s) - \mathcal{L}\{e^{-t}\sin t\}(s) \end{aligned}$$

onde utilizámos a propriedade (3). Então:

$$\begin{aligned} H_1(s) &= e^{-\pi s}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t\right\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{H(t-\pi)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-(t-\pi)}\cos(t-\pi) - e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi)\right)\}(s) \end{aligned}$$

onde utilizámos a propriedade (4). De igual modo se mostra que

$$\begin{aligned}
 H_2(s) &= -e^{-2\pi s} \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)} \\
 &= -e^{-2\pi s} \left(\frac{1}{2s} - \frac{1}{2} \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1} - \frac{1}{(s+1)^2 + 1} \right) \\
 &= -e^{-2\pi s} \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t \right\} (s) \\
 &= -\mathcal{L} \left\{ H(t-2\pi) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-(t-2\pi)} \cos(t-2\pi) - e^{-(t-2\pi)} \sin(t-2\pi) \right) \right\} (s)
 \end{aligned}$$

Finalmente a solução do PVI é

$$\begin{aligned}
 y(t) &= H(t-\pi) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-(t-\pi)} \cos t + e^{-(t-\pi)} \sin t \right) - \\
 &\quad - H(t-2\pi) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-(t-2\pi)} \cos t - e^{-(t-2\pi)} \sin t \right) + e^{-t} \sin t
 \end{aligned}$$

4. Designa-se por δ a distribuição de Dirac com suporte na origem. Utilizando a transformada de Laplace, resolva os seguintes problemas de valor inicial:

- a) $y'' + 2y' + 2y = \delta(t-\pi)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
- b) $y'' + y = \delta(t-\pi) - \delta(t-2\pi)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
- c) $y'' + y = \delta(t-\pi) \cos t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Resolução:

(a) Aplicando a Transformada de Laplace a ambos os membros da equação, utilizando (2) e denotando $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$, obtem-se

$$-y'(0) - sy(0) + s^2 Y(s) + 2(-y(0) + sY(s)) + 2Y(s) = \mathcal{L}\{\delta(t-\pi)\}(s)$$

o que é equivalente a

$$(s^2 + 2s + 2)Y(s) - s - 2 = e^{-\pi s}$$

onde utilizámos o facto de $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ e

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}(s) = e^{-t_0 s} \quad , \quad t_0 > 0$$

Então

$$Y(s) = \frac{2+s}{s^2+2s+2} + e^{-\pi s} \frac{1}{s^2+2s+2} \equiv H_1(s) + H_2(s)$$

Por método análogo ao utilizado na alínea (c) do problema 3:

$$H_1(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+2} + \frac{1}{s^2+2s+2} = \mathcal{L}\{e^{-t} \cos t + e^{-t} \sin t\}(s)$$

Utilizando a propriedade (4):

$$\begin{aligned}
 H_2(s) &= e^{-\pi s} \mathcal{L}\{e^{-t} \sin t\}(s) = \mathcal{L}\{H(t-\pi) e^{-(t-\pi)} \sin(t-\pi)\}(s) \\
 &= \mathcal{L}\{-H(t-\pi) e^{-(t-\pi)} \sin t\}(s)
 \end{aligned}$$

Finalmente a solução do PVI é

$$y(t) = e^{-t}(\cos t + \operatorname{sen} t) - H(t - \pi)e^{-(t-\pi)} \operatorname{sen} t$$

(b) Aplicando a Transformada de Laplace a ambos os membros da equação, utilizando (2) e denotando $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$, obtem-se

$$-y'(0) - sy(0) + s^2Y(s) + Y(s) = \mathcal{L}\{\delta(t - \pi) - \delta(t - 2\pi)\}(s)$$

o que é equivalente a

$$(s^2 + 1)Y(s) = e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}$$

onde utilizámos o facto de $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ e

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\}(s) = e^{-t_0 s}, \quad t_0 > 0$$

Então

$$Y(s) = e^{-\pi s} \frac{1}{s^2 + 1} - e^{-2\pi s} \frac{1}{s^2 + 1} \equiv H_1(s) + H_2(s)$$

pelo que, utilizando a propriedade (4)

$$H_1(s) = e^{-\pi s} \mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}(s) = \mathcal{L}\{H(t - \pi) \operatorname{sen}(t - \pi)\}(s)$$

e

$$H_2(s) = -e^{-2\pi s} \mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}(s) = -\mathcal{L}\{H(t - 2\pi) \operatorname{sen}(t - 2\pi)\}(s)$$

Finalmente a solução do PVI é

$$y(t) = -H(t - \pi) \operatorname{sen} t - H(t - 2\pi) \operatorname{sen} t$$

(c) Aplicando a Transformada de Laplace a ambos os membros da equação, utilizando (2) e denotando $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$, obtem-se

$$-y'(0) - sy(0) + s^2Y(s) + Y(s) = \mathcal{L}\{\delta(t - \pi) \cos t\}(s)$$

o que é equivalente a

$$(s^2 + 1)Y(s) - 1 = -e^{-\pi s}$$

onde utilizámos o facto de $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0)$$

Então

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2 + 1} - e^{-\pi s} \frac{1}{s^2 + 1} \\ &= \mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}(s) - e^{-\pi s} \mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}(s) - \mathcal{L}\{H(t - \pi) \operatorname{sen}(t - \pi)\}(s) \end{aligned}$$

Finalmente, a solução do PVI é

$$y(t) = \operatorname{sen} t + H(t - \pi) \operatorname{sen} t$$